

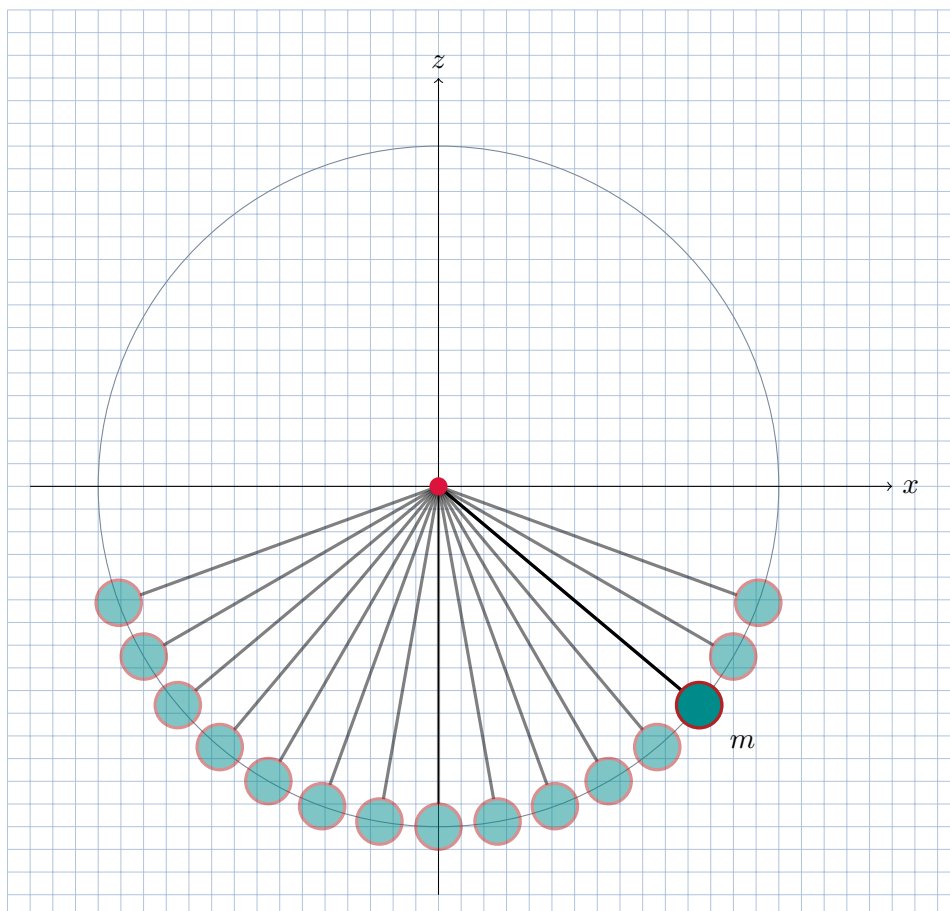
Medizinische Physik und Biophysik (MPBP)

Ausführliche physikalische Beispiele

Das mathematische Pendel

Dipl.-Ing. Dr. Friedrich Hanser

SS 2011



Inhaltsverzeichnis

1 Das mathematische Pendel	2
1.1 Eingeschränkte Bewegung	2
1.2 Bewegungsgleichung	3
1.3 Integration	4
1.3.1 Direkte Weg	4
1.3.2 Durch Energiesatz	5
1.3.3 Diskussion der Lösungen	6
1.4 Das rotierende Pendel	6
1.5 Das schwingende Pendel	8
1.6 Das harmonische Pendel	12

1 Das mathematische Pendel

Alle Pendel zeigen das Phänomen der Schwingung einer Masse. Je nach Realisierung unterscheidet man mehrere Arten. Einige mögen namentlich genannt sein:

- Das mathematische Pendel, auch Fadenpendel
- Das physikalische Pendel
- Das Foucaultsche Pendel (Erdrotation)
- Das Federpendel

Bei dieser Übung wird das mathematische Pendel eingehender untersucht. Es ist eine Idealisierung eines realen Pendels bei der eine Punktmasse m an einem Faden oder einer (masselosen) Stange der Länge l aufgehängt ist.

1.1 Eingeschränkte Bewegung auf einer Kurve im Gravitationsfeld

Das mathematischen Pendel ist ein Beispiel für eine eingeschränkte Bewegung einer Punktmasse m im Schwere- oder Gravitationsfeld. Darf sich die Punktmasse nur entlang einer Kurve C bewegen, so ist durch diese Kurve eine (holonome) Zwangsbedingung gegeben. Durch Zwangsbedingungen wird der Bewegungsspielraum eingeschränkt, d.h. die Freiheitsgrade des Systems reduzieren sich. Wie kann diese Zwangsbedingung in die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{b} = \mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{t})$$

eingebaut werden? Nachdem die Bewegung auf einer vorgegebenen Kurve C stattfindet, bietet sich als geeignetes Koordinatensystem das begleitende Dreibein, bestehend aus den normierten Vektoren \mathbf{T} , \mathbf{N} und \mathbf{B} , an. Diese Vektoren bilden ein vollständiges Orthonormalsystem (vONS). Wird der Vektor der Beschleunigung \mathbf{b} und der Kraftvektor \mathbf{K} im begleitenden Dreibein dargestellt, erhält man für die Beschleunigung die bekannte Zerlegung in Tangential- und Normalbeschleunigung

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{b} = \dot{v}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}$$

mit $v = \|\mathbf{v}\| = \|\dot{\mathbf{r}}\|$ und dem Krümmungsradius ρ . Die Tangential-, Normal- und Binormalkomponente der (äußeren) Kraft errechnet sich gemäß

$$\mathbf{K} = \langle \mathbf{T}, \mathbf{K} \rangle \mathbf{T} + \langle \mathbf{N}, \mathbf{K} \rangle \mathbf{N} + \langle \mathbf{B}, \mathbf{K} \rangle \mathbf{B} = K_t \mathbf{T} + K_n \mathbf{N} + K_b \mathbf{B}.$$

Somit lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung im vONS des begleitenden Dreibeins

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= K_t, \\ mv^2/\rho &= K_n, \\ 0 &= K_b. \end{aligned}$$

Betrachtet man jetzt ein Teilchen im Schwerfeld mit $\mathbf{K}^s = -mg\mathbf{e}_z$, so wird für beliebige Bewegungen, im allgemeinen, $K_n^s \neq mv^2/\rho$ und $K_b^s = -mg\langle \mathbf{B}, \mathbf{e}_z \rangle \neq 0$ sein. Dieser Widerspruch kann nur durch Hinzunahme von Zwangskräften aufgelöst werden. Selbige stehen natürlich senkrecht auf die Kurve. Jetzt erhält man

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= K_t^s \\ mv^2/\rho &= K_n^s + K_n^z \\ 0 &= K_b^s + K_b^z. \end{aligned}$$

Wäre statt der Kraft \mathbf{K}^s die Kraft $\mathbf{K}^s + \mathbf{K}^z$ am Werk, so würde die Punktmasse auch ohne geometrische Beschränkung die Bewegung entlang der Kurve C beschreiben. Die Kurve wird durch die Zwangskraft \mathbf{K}^z allerdings mechanisch belastet. Es gilt $K_b^z = -K_b^s$ und $K_n^z = mv^2/\rho - K_n^s$ mit den statischen Komponenten K_b^s und K_n^s sowie der dynamischen Komponente mv^2/ρ (Zentrifugalkraft).

Solche Zwangskräfte (auch Scheinkräfte) treten auch immer dann auf, wenn man die Bewegungsgleichung in einem nicht-Inertialsystem formuliert (Corioliskraft). Auch das begleitende Dreibein ist kein Inertialsystem, weil sich die Basis, von einem Punkt zum nächsten, ändert. Zu bemerken ist noch, dass Zwangskräfte keine Arbeit verrichten. Es gilt nämlich $\delta A^z = \mathbf{K}^z \cdot d\mathbf{r} = 0$. Es gilt aber der Energiesatz der Mechanik, wenn die äußeren Kräfte konservativ sind.

1.2 Die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels

Beim (ebenen) mathematischen Pendel findet die Bewegung auf einem vertikalen Kreis (in der $x-z$ -Ebene) mit Radius l statt, wie Abb. 1 zeigt. Die eingeschränkte Bewegung ist also durch die Kurve

$$C = \{\mathbf{r} \mid x^2 + z^2 = l^2, y = 0, l > 0\}$$

gegeben. Die Kurve wird parametrisiert durch den Winkel φ zwischen Ortsvektor \mathbf{r} (Ort des Massenpunktes) und negativer z -Achse

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi) = l \sin \varphi \mathbf{e}_x - l \cos \varphi \mathbf{e}_z.$$

Die Schwerkraft lautet $\mathbf{K}^s(\mathbf{r}) = -mg\mathbf{e}_z$. Das begleitende Dreibein kann leicht gefunden werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\varphi) &= (\cos \varphi, 0, \sin \varphi), \\ \mathbf{N}(\varphi) &= (-\sin \varphi, 0, \cos \varphi), \\ \mathbf{B}(\varphi) &= (0, -1, 0). \end{aligned}$$

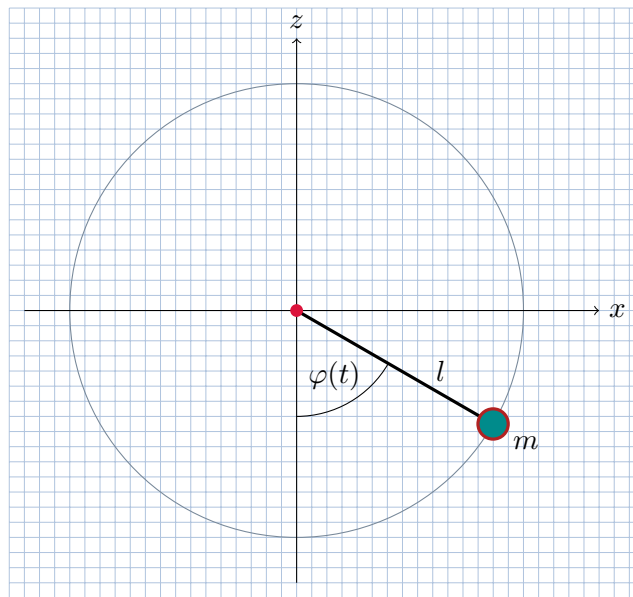


Abbildung 1: Das ebene mathematische Pendel: Ein Massenpunkt m bewegt sich im Gravitationsfeld entlang eines vertikalen Kreises mit Radius l .

Jetzt können wir die Bewegungsgleichung im vONS des begleitenden Dreibeines formulieren:

$$\begin{aligned} m\mathbf{b} &= \mathbf{K}^s, \\ m\dot{v}\mathbf{T} + mv^2/\rho\mathbf{N} + 0\mathbf{B} &= -mg \sin \varphi \mathbf{T} - mg \cos \varphi \mathbf{N} + 0\mathbf{B}. \end{aligned}$$

Mit $v = \|\mathbf{v}\| = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(l\varphi) = l\dot{\varphi}$ und $\dot{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2}{dt^2}(l\varphi) = l\ddot{\varphi}$ erhält man

$$\begin{aligned} ml\ddot{\varphi} &= -mg \sin \varphi, \\ K_n^z &= lm\dot{\varphi}^2 + mg \cos \varphi. \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir für die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi.$$

1.3 Integration der Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi$ integrieren wir auf zwei verschiedenen Wegen.

1.3.1 Der direkte Weg: Trennung der Variablen

Durch Anwendung der Kettenregel können wir für

$$\ddot{\varphi} = \frac{d}{dt}\dot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$$

schreiben und dies wiederum in die Bewegungsgleichung einsetzen:

$$\dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi d\varphi \iff \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi d\varphi.$$

Integrieren wir auf beiden Seiten mit den Anfangsbedingungen $\varphi(t_0)$ und $\dot{\varphi}(t_0)$, dann erhalten wir

$$\int_{\dot{\varphi}(t_0)}^{\dot{\varphi}(t)} \dot{\varphi}' d\dot{\varphi}' = -\frac{g}{l} \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} \sin \varphi' d\varphi' \implies \frac{1}{2} \dot{\varphi}'^2 \Big|_{\dot{\varphi}(t_0)}^{\dot{\varphi}(t)} = \frac{g}{l} \cos \varphi' \Big|_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)}.$$

Einsetzen in die Stammfunktionen ergibt

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2(t) - \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2(t_0) = \frac{g}{l} [\cos \varphi(t) - \cos \varphi(t_0)],$$

und daraus erhalten wir

$$\dot{\varphi}(t) = \sqrt{\dot{\varphi}^2(t_0) + \frac{2g}{l} \cos \varphi(t) - \frac{2g}{l} \cos \varphi(t_0)}.$$

Kosmetische Erweiterungen führen uns zu

$$\dot{\varphi}(t) = \sqrt{\frac{2}{ml^2} \sqrt{\frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2(t_0) - mgl \cos \varphi(t_0) + mgl \cos \varphi(t)}}.$$

Die ersten beiden Terme identifizieren wir als die kinetische $T(t_0) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2(t_0)$ und potentielle Energie $V(t_0) = -mgl \cos \varphi(t_0)$ zum Zeitpunkt $t = t_0$. Nachdem der Energiesatz der Mechanik gilt, und dieser besagt, dass zu allen Zeiten die Gesamtenergie erhalten bleibt, kann die Summe der kinetischen und potentiellen Energie zum Zeitpunkt $t = t_0$ nur die konstante Gesamtenergie des Systems sein. Wir schreiben also $E = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2(t_0) - mgl \cos \varphi(t_0)$ und setzen dies in die Wurzel ein:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{2}{m} \sqrt{E + mgl \cos \varphi(t)}}.$$

Mit dieser Gleichung werden wir dann später weiterarbeiten.

1.3.2 Der elegante Weg: Integration mit Hilfe des Energiesatzes

Der Energiesatz der Mechanik besagt, dass für konservative Kräfte die Summe aus kinetischer und potentieller Energie zu allen Zeiten erhalten, sprich konstant, bleibt. Diese Konstante wird als Gesamtenergie des Systems bezeichnet.

$$T(t) + V(t) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2(t) - mgl \cos \varphi(t) = E$$

Rechnet man aus dieser Gleichung $\dot{\varphi}(t)$ aus, erhalten wir wie oben

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{2}{m} \sqrt{E + mgl \cos \varphi(t)}}.$$

Jetzt wollen wir untersuchen, welche Lösungen (Bewegungsformen) wir erwarten können.

1.3.3 Diskussion der Lösungen

Eine genauere Analyse des Wurzelausdrucks ermöglicht Aussagen über die Lösungsmanigfaltigkeit des mathematischen Pendels.

- Der Radikand muss positiv sein, d.h. $E + mgl \cos \varphi(t) \geq 0$. Die Gesamtenergie E muss also größer als die minimale potentielle Energie sein: $E \geq -mgl = V_{\min} = V(\varphi)|_{\varphi=0}$.
- Für eine Gesamtenergie $E > V_{\min} = -mgl$ muss man drei Fälle unterscheiden:

Das schwingende Pendel: Für $E < mgl = V_{\max} = V(\varphi)|_{\varphi=\pi}$ gibt es zwei Umkehrwinkel $\pm\varphi_u$ bei denen der Radikand null wird. Dies ist die Situation des schwingenden Pendels.

Das rotierende Pendel: Für $E > mgl = V_{\max}$ hat das Pendel bei $\varphi = \pi$ noch kinetische Energie. Das Pendel rotiert im Uhrzeiger- oder Gegenuhrzeigersinn, je nachdem ob $\dot{\varphi}(t) \gtrless 0$.

Das labile Pendel: Dieser Fall ist ein Grenzfall. Für $E = mgl = V_{\max}$ hat das Pendel gerade soviel Energie, um nach unendlich langer Zeit den obersten Punkt bei $\varphi = \pi$ zu erreichen. In dieser Situation ist das Pendel in einem labilen Gleichgewicht.

Im Weiteren werden wir uns genauer für das rotierende und schwingende Pendel interessieren.

1.4 Exakte Lösung des rotierenden Pendels

Für die exakte Lösung müssen wir die nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E + mgl \cos \varphi(t)}$$

lösen. Als Erstes setzen wir für $\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ und erhalten

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E + mgl - 2mgl \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{2(E + mgl)}{m}} \sqrt{1 - \frac{2mgl}{E + mgl} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Jetzt substituieren wir $\psi = \frac{\varphi}{2}$ sowie $k^2 = \frac{2mgl}{E + mgl}$ und bekommen

$$\dot{\psi}(t) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}.$$

Durch Separation der Variablen erhalten wir

$$k \sqrt{\frac{l}{g}} \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \int dt.$$

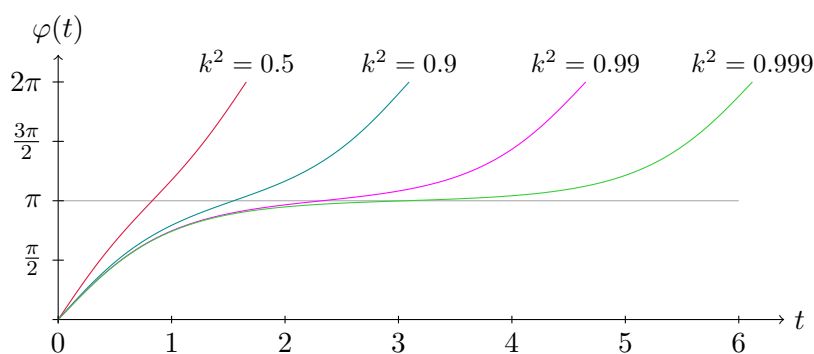


Abbildung 2: Zeitliche Abhängigkeit des Winkels φ beim rotierenden mathematischen Pendel für Parameter $k^2 = 0.5, 0.9, 0.99, 0.999$. Die Periodendauer T wird mit zunehmender Gesamtenergie E kleiner.

Wir stellen fest, dass für das rotierende Pendel mit $E > mgl$ offensichtlich $k^2 < 1$ gilt. Integrieren wir jetzt auf beiden Seiten, so erhalten wir

$$k \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\psi} \frac{d\psi'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi'}} = \int_0^t dt' = t = t(\psi),$$

eine Gleichung welche die Zeit t als Funktion des Winkels $\psi = \varphi/2$ angibt. Das Integral auf der linken Seite ist ein *unvollständiges elliptisches Integral erster Gattung* und wird mit $F(\psi, k)$ bezeichnet. Dies führt uns auf eine Form

$$F(\psi, k) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{l}} t = u,$$

welche wir invertieren können

$$\frac{\varphi}{2} = \psi = F^{-1}(u, k) = \text{am}(u, k) = \text{am}\left(\frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{l}} t, k\right),$$

wobei wir einer Jacobi-elliptischen Funktion, der Jacobi Amplitude $\text{am}(u, k)$ begegnet sind. Diese Funktion muß, wie alle elliptischen Funktionen, in einer Funktionstabelle nachgeschlagen werden. Zusammenfassend erhalten wir die analytische Lösung des rotierenden Pendels:

$$\varphi(t) = 2 \text{am}\left(\frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{l}} t, k\right).$$

Eine grafische Veranschaulichung zeigt Abb. 2 für verschiedene Werte des Parameters k^2 . Dabei wurde obiges *unvollständige elliptische Integral erster Gattung* numerisch gelöst.

1.5 Exakte Lösung des schwingenden Pendels

Wie beim rotierenden Pendel müssen wir auch für das schwingende Pendel die nicht-lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E + mgl \cos \varphi(t)}$$

lösen. Mit den gleichen Schritten wie oben erhalten wir

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{l}} \int dt,$$

allerdings mit dem Unterschied, dass für den Schwingfall mit $-mgl \leq E \leq mgl$ offensichtlich $k^2 > 1$ gilt. Das Integral auf der linken Seite wird erst dann ein elliptisches Integral, wenn wir den Fall $k^2 > 1$ auf den Fall $k^2 < 1$ zurückführen. Mit der Substitution $\sin \chi = k \sin \psi$ wird uns das gelingen. Bekanntlich müssen wir $d\psi$ durch $d\chi$ ausdrücken. Wir berechnen zunächst

$$\frac{d}{d\psi} \sin \chi = \frac{d}{d\psi} k \sin \psi \implies \cos \chi \frac{d\chi}{d\psi} = k \cos \psi = k \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = k \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \chi},$$

und erhalten daraus

$$d\psi = \frac{\cos \chi}{k \sqrt{1 - (1/k^2) \sin^2 \chi}} d\chi,$$

was wir sofort ins Integral einsetzen:

$$\frac{1}{k} \int \frac{\cos \chi d\chi}{\sqrt{1 - \sin^2 \chi} \sqrt{1 - (1/k^2) \sin^2 \chi}} = \frac{1}{k} \int \frac{d\chi}{\sqrt{1 - (1/k^2) \sin^2 \chi}} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{l}} \int dt.$$

Wenn wir noch $\bar{k} = 1/k$ substituieren bekommen wir

$$\int_0^\chi \frac{d\chi'}{\sqrt{1 - \bar{k}^2 \sin^2 \chi'}} = F(\chi, \bar{k}) = \sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^t dt' = \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

Das Integral auf der linken Seite haben wir schon beim rotierenden Pendel als *unvollständiges elliptisches Integral erster Gattung* identifiziert. Wieder finden wir

$$\chi = F^{-1} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t, \bar{k} \right) = \operatorname{am} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t, \bar{k} \right),$$

und wenn wir die Substitution $\sin \chi = k \sin \psi$ rückerinsetzen

$$k \sin \psi = \sin \chi = \sin \left[\operatorname{am} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t, \bar{k} \right) \right] = \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t, \bar{k} \right),$$

sind wir einer weiteren Jacobischen elliptischen Funktion, dem *Sinus Amplitudinis*, bezeichnet als $\operatorname{sn}(u, \bar{k}) = \sin \operatorname{am}(u, \bar{k})$, begegnet. Als analytische Lösung für das schwingende mathematische Pendel erhalten wir somit

$$\varphi(t) = 2 \arcsin \left[\bar{k} \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t, \bar{k} \right) \right].$$

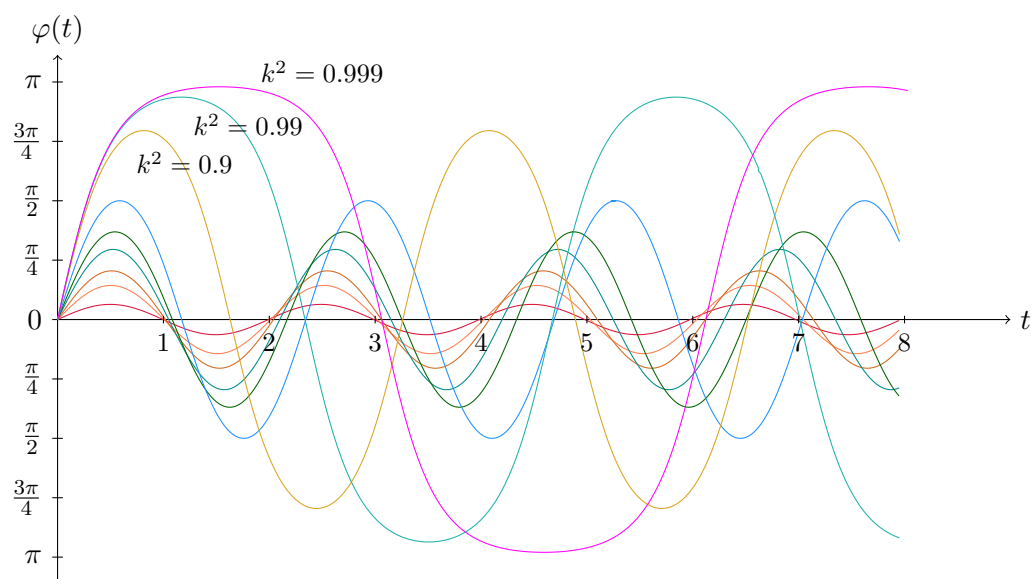


Abbildung 3: Zeitliche Abhängigkeit des Winkels φ beim schwingenden mathematischen Pendel für Parameter $k^2 = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.9, 0.99, 0.999$. Die Periodendauer T wird mit zunehmender Gesamtenergie E , $-mgl < E < mgl$ größer.

Eine grafische Veranschaulichung zeigt Abb. 3 für einige Werte des Parameters \bar{k}^2 .

Als weitere interessante Fragestellung wollen wir die Schwingungsdauer T als Funktion des Auslenkwinkels φ_u berechnen. Dazu müssen wir

- die Integration von der unteren Grenze $\varphi = 0$ bis zur oberen Grenze, dem Umkehrpunkt $\varphi = \varphi_u$, durchführen,

und Folgendes berücksichtigen:

- Es gilt $\psi_u = \varphi_u/2$ und $k^2 \sin^2 \psi_u = 1$ und damit auch $k \sin \psi_u = 1$.
- Für $\psi = \psi_u$ gilt $\sin \chi_u = k \sin \psi_u = 1 = \sin(\pi/2)$.
- Im Zeitbereich läuft die Integration von 0 bis zum zeitlichen Umkehrpunkt, was einem Viertel der Schwingungsdauer $T/4$ entspricht.
- Die Grenzen transformieren sich zu $\psi = 0 \rightarrow \chi = 0$ und $\psi = \psi_u \rightarrow \chi = \pi/2$.

Jetzt müssen wir das Ganze noch ins Integral einsetzen

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \bar{k}^2 \sin^2 \chi}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^{T/4} dt = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{g}{l}} T,$$

und nach T auflösen. Dann erhalten wir für die Schwingungsdauer

$$T(\bar{k}) = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \bar{k}^2 \sin^2 \chi}} = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K(\bar{k}).$$

Die Funktion $K(\bar{k})$ ist ein *vollständiges elliptisches Integral erster Gattung* und muss ebenfalls in Funktionstabellen nachgeschlagen werden.

Als nächstes wollen wir noch nachträglich klären, wie \bar{k} mit dem Auslenkwinkel φ_u zusammenhängt. Im Umkehrpunkt gilt ja $k^2 \sin^2 \psi_u = 1$ und damit auch $k \sin \psi_u = 1$. Wenn wir für $\psi = \varphi/2$ einsetzen, bekommen wir $\sin(\varphi_u/2) = 1/k = \bar{k} = \bar{k}(\varphi_u)$. Jetzt müssen wir nur noch alle Teile zusammenfügen, um die Schwingungsdauer als Funktion des Auslenkwinkels zu bekommen:

$$T(\varphi_u) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi_u/2) \sin^2 \chi}}.$$

Wir erkennen übrigens sofort für den harmonischen Grenzfall, d.h. für $\varphi_u \rightarrow 0$ und damit auch für $\bar{k} \rightarrow 0$

$$T(k=0) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\chi}{\sqrt{1-0}} = 4K(0)\sqrt{\frac{l}{g}} = 4\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

die bekannte Formel für die Schwingungsdauer.

In die andere Richtung, d.h. für $\varphi_u \rightarrow \pi/2$ ($\bar{k} \rightarrow 1$), wird die Schwingungsdauer unendlich groß, denn es gilt $\lim_{\bar{k} \rightarrow 1} K(\bar{k}) = \infty$.

Zum Abschluss wollen wir die exakte Lösung noch in eine Reihe entwickeln. Dazu werden wir den Integranden

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi_u/2) \sin^2 \chi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

in eine Taylorreihe um $x = 0$ entwickeln. Dazu gehen wir folgendermaßen vor: In einem ersten Schritt entwickeln wir die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

um den Entwicklungspunkt $x = 0$ in eine Taylorreihe. Für die ν -te Ableitung mit $\nu \geq 1$ erhalten wir

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2\nu - 1)}{2^\nu} (1-x)^{-(2\nu+1)/2} \quad \text{und} \quad f^{(\nu)}(x)|_{x=0} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2\nu - 1)}{2^\nu}.$$

Der Quotient auf der rechten Seite kann durch

$$\frac{1 \cdot 3 \cdots (2\nu - 1)}{2^\nu} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2\nu - 1)}{2^\nu} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2\nu)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2\nu)} = \frac{(2\nu)!}{2^\nu 2^\nu \nu!},$$

eleganter ausgedrückt werden (gilt jetzt sogar für $\nu = 0$). Die Taylorreihe lautet somit

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x)|_{x=0}}{\nu!} x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu)!}{(2^\nu \nu!)^2} x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(x).$$

Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ergibt nach dem Quotientenkriterium

$$\left| \frac{a_{\nu+1}(x)}{a_{\nu}(x)} \right| = \left| \frac{(2\nu+2)! x^{\nu+1} (2^{\nu}\nu!)^2}{(2^{\nu+1}(\nu+1)!)^2 (2\nu)! x^{\nu}} \right| = \frac{(2\nu+1)(2\nu+2)}{2^2(\nu+1)(\nu+1)} |x| = \frac{\nu+\frac{1}{2}}{\nu+1} |x| \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} |x| \stackrel{!}{<} 1.$$

erwartungsgemäß den Wert 1, da die Funktion $f(x) = 1/\sqrt{1-x}$ an der Stelle $x = 1$ eine Polstelle besitzt. Dies wiederum gestattet uns für x auch kompliziertere Ausdrücke einzusetzen, solange diese nur im Bereich des Konvergenzradius liegen. So können wir für x sofort x^2 einsetzen, da mit $|x| < 1$ auch $|x^2| < 1$ gilt. Wir wollen darüberhinaus noch bemerken, dass diese Potenzreihe für alle x eines kompakten Intervalls $[0, a] \subset [0, 1)$ gleichmäßig konvergiert. Ganz unspektakulär erhalten wir so die Taylorreihe für

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu)!}{(2^{\nu}\nu!)^2} x^{2\nu},$$

und wenn wir für $x^2 = \sin^2(\varphi_u/2) \sin^2 \chi$ setzen

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi_u/2) \sin^2 \chi}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu)!}{(2^{\nu}\nu!)^2} \sin^{2\nu}(\varphi_u/2) \sin^{2\nu} \chi.$$

Dieses Ergebnis setzen wir in die Formel für die Schwingungsdauer ein:

$$\begin{aligned} T(\varphi_u) &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi_u/2) \sin^2 \chi}} \\ &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu)!}{(2^{\nu}\nu!)^2} \sin^{2\nu}(\varphi_u/2) \sin^{2\nu} \chi \, d\chi. \end{aligned}$$

Da die Potenzreihe für $\varphi_u \in [0, \phi] \subset [0, \pi/2)$ gleichmäßig konvergiert (siehe oben) dürfen wir die beiden Grenzprozesse (Integration und Summation) vertauschen:

$$T(\varphi_u) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu)!}{(2^{\nu}\nu!)^2} \sin^{2\nu}(\varphi_u/2) \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu} \chi \, d\chi.$$

Als nächsten Schritt versuchen wir für das Integral

$$I(\nu) = \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu} \chi \, d\chi$$

eine explizite Lösung zu finden. Wir beginnen mit

$$\begin{aligned} I(1) &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 \chi \, d\chi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\chi) \, d\chi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\chi - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2\chi \, d\chi = \frac{1}{2} \chi \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4} \sin 2\chi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

und versuchen für $I(\nu)$ eine Rekursionsformel zu berechnen. Wir starten mit einer partiellen Integration

$$\begin{aligned}
 I(\nu) &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu} \chi \, d\chi = \left. \begin{array}{l} u = \sin^{2\nu-1} \chi \\ v' = \sin \chi \\ u' = (2\nu-1) \sin^{2\nu-2} \chi \cos \chi \\ v = -\cos \chi \end{array} \right| \\
 &= -\sin^{2\nu-1} \chi \cos \chi \Big|_0^{\pi/2} + (2\nu-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu-2} \chi \cos^2 \chi \, d\chi \\
 &= (2\nu-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu-2} \chi (1 - \sin^2 \chi) \, d\chi = (2\nu-1)I(\nu-1) - (2\nu-1)I(\nu),
 \end{aligned}$$

um daraus die gesuchte Rekursionsformel zu bekommen:

$$\begin{aligned}
 I(\nu) &= \frac{2\nu-1}{2\nu} I(\nu-1) = \frac{(2\nu-1) \cdot (2\nu-3)}{(2\nu) \cdot (2\nu-2)} I(\nu-2) \\
 &= \frac{(2\nu-1) \cdot (2\nu-3) \cdots (3)}{(2\nu) \cdot (2\nu-2) \cdots (4)} I(1) = \frac{(2\nu-1) \cdot (2\nu-3) \cdots (3) \pi}{(2\nu) \cdot (2\nu-2) \cdots (4) \cdot 4} \\
 &= \frac{\pi}{2} \frac{(2\nu-1) \cdot (2\nu-3) \cdots (1)}{(2\nu) \cdot (2\nu-2) \cdots (2)} = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\nu-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2\nu)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2\nu)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2\nu)} \\
 &= \frac{\pi}{2} \frac{(2\nu)!}{(2^\nu \nu!)^2}
 \end{aligned}$$

Jetzt können wir alles in die Formel für die Schwingungsdauer verpacken und wir erhalten, endlich, mit tiefer Genugtuung

$$T(\varphi_u) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{(2\nu)!}{(2^\nu \nu!)^2} \right]^2 \sin^{2\nu}(\varphi_u/2).$$

Der grafische Zusammenhang ist in Abb. 4 veranschaulicht. Die ersten drei Terme dieser Reihe ergeben ausgeschrieben

$$T(\varphi_u) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\varphi_u}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\varphi_u}{2}\right) + \cdots \right].$$

1.6 Harmonische Näherung des schwingenden Pendels

Für die potentielle Energie des mathematischen Pendels haben wir

$$V(\varphi) = -mgl \cos \varphi$$

gefunden. Wir bemerken einen Cosinus-förmigen und damit anharmonischen Potentialverlauf. Es handelt sich also beim mathematischen Pendel um eine anharmonische Schwingung. Für kleine Auslenkungen hingegen, kann man den Cosinus durch die ersten

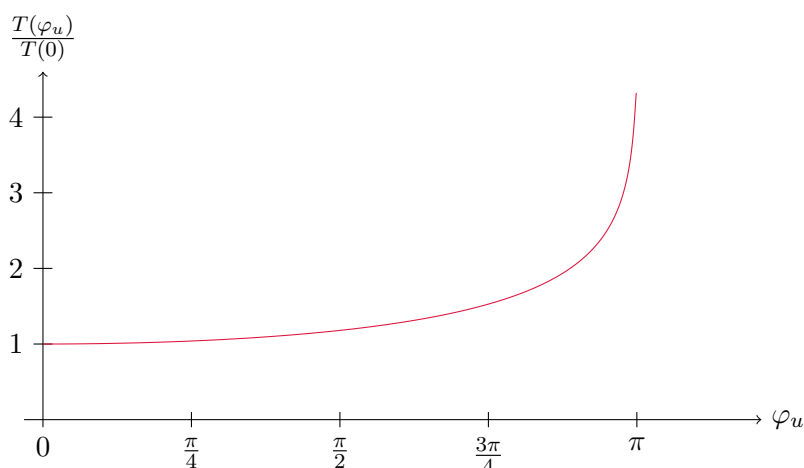


Abbildung 4: Die Schwingungsdauer T des mathematischen Pendels als Funktion des Auslenkwinkels φ_u . Für $\varphi_u = \pi$ wird die Schwingungsdauer unendlich groß.

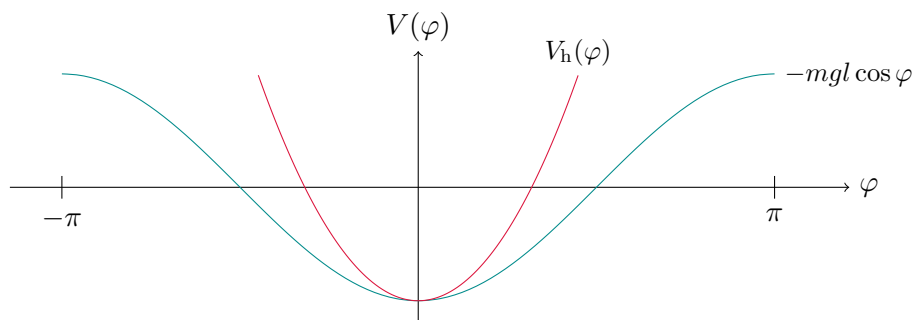


Abbildung 5: Harmonische Näherung $V_h(\varphi)$ des Cosinus-förmigen Potentials $V(\varphi)$; Die Näherung gilt nur für sehr kleine Winkel $\varphi \lesssim 5^\circ$.

beiden Terme seiner Taylorreihe $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$ in guter Näherung ersetzen (siehe Abb. 5)

$$V_h(\varphi) \approx -mgl \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right).$$

Dieses harmonische Potential führt zu harmonischen Lösungen.

Das sehen wir, wenn wir die Näherung für kleine Auslenkungen in die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi$$

einbauen. Hier müssen wir nur den Sinus durch seinen ersten Term in seiner Taylorreihe $\sin \varphi \approx \varphi$ ersetzen, um dann eine harmonische Schwingungsgleichung zu erhalten

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0,$$

wobei wir die Substitution $\omega^2 = g/l$ eingeführt haben. Die allgemeine Lösung dieser linearen, homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann leicht durch einen Ansatz $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ gefunden werden. Wir setzen in die

Differentialgleichung ein und erhalten das charakteristische Polynom $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ mit den komplexen Nullstellen $\lambda_1 = i\omega$ und $\lambda_2 = -i\omega$ und daraus das komplexe Fundamentalsystem, bestehend aus dem konjugiert-komplexen Paar $\{e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}\}$. Da jede Linearkombination der beiden Fundamentallösungen wieder eine Lösung ist, können wir auch ein reelles Fundamentalsystem angeben, indem wir $\frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = \cos \omega t$ und $\frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \sin \omega t$ bilden. Somit probieren wir den Ansatz

$$\varphi(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

mit den Anfangsbedingungen $\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0$ und $\varphi(t=0) = 0$ und erhalten schlussendlich die Lösung

$$\varphi(t) = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Die Periodendauer dieser Schwingung finden wir aus der Bedingung $\sin \omega t = \sin \omega(t+T)$, welche erfüllt ist, wenn $\omega T = 2\pi$ gilt. Daraus bekommen wir für die Schwingungsdauer des harmonischen Pendels die weltbekannte Formel

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$